第十二章习题

12.1 找出以下函数的原函数.

1) $x \longmapsto 2x^2+3x-5$. 2) $x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$

3) $x \longmapsto \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$ 4) $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x+1}$

12.2 找出以下函数的原函数

1) $x \longmapsto x\sqrt{1+x}$, 2) $x \longmapsto x^3e^{2x}$ 3) $x \longmapsto x^2\ln x$

12.3 对于 $n\in\mathbb{N}$, 给出函数 $x \longmapsto \ln^n x$ 的原函数.

12.4 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为可微严格递增的双射函数, 使得 $f(0)=0$

在 $\mathbb{R}$ 上定义函数:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - x f(x)$$

函数 F 是可微的吗? 导出一个等式.

给出这一结果的几何解释.

12.5 研究函数 $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

12.6 证明: 当 x 趋于 1 时.

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt$$

趋于 0.

导出 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ 在 x 趋于 1 时的极限.

12.7 找出$\mathbb{R}$上的所有连续函数 f 使得:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt.$$

12.8 设 f 在 $\mathbb{R}_+$ 连续，且为正的 非负.

又设存在正实数 k 使得:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)\leq k\int_0^x f(t)\,dt.$$

证明: f 为零函数.

12.9 设 $c\in\mathbb{R}_+$, u, v 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, 且满足:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad u(x)\leq c+\int_0^x u(t)v(t)\,dt$$

证明:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad u(x)\leq c\exp\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)$$

12.10 设 f 是$\mathbb{R}$上非负 C^2 函数.

又设 f'' 是有界的且记 $M:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.

证明: $\forall x\in\mathbb{R},\quad |f'(x)|\leq\sqrt{2Mf(x)}$

12.11 对于 $x>0$, 定义

$$f(x)=\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

确定 $\lim_{x\to 0} f(x)$. / 提示: $\frac{\sin t}{t^2}=\frac{1}{t}+o(t)$.

12.12 设 f 为$\mathbb{R}$上的 C^2 函数且 $x\in\mathbb{R}$ 满足 $f''(x)\neq 0$

1) 证明: 存在 $\eta>0$ 使得: 对于 $[-\eta,\eta]\backslash\{0\}$ 中的任意 h, 存在~~唯一~~ $]0,1[$ 中~~任意~~唯一一个 θ, 使得: $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$

记 θ_x 为将 $[-\eta,+\eta]\backslash\{0\}$ 中的 h 映为唯一一个对应 θ 的函数.

2) 证明 $\lim_{h\to 0}\theta_x(h)=\frac{1}{2}$